4.4 Limite e continuidade

Noções Topológicas em $\mathbb{R}^2$:

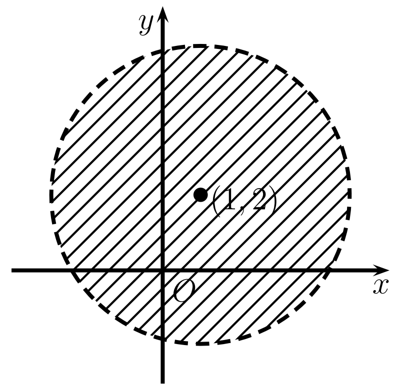
Dados dois pontos quaisquer (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$ indicaremos a distância entre eles por $d\Big[(x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Definição **4.4.1.** *Uma* ***vizinhança*** *do ponto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *de raio* $r > 0$ *é o conjunto* $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; d[(x, y), (x_0, y_0)] < r\}$

Exemplo **4.4.1.** *A vizinhança de* $(1, 2)$ *de raio 2 é o conjunto*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; d[(x, y), (1, 2)] < 2\}$$

cuja representação gráfica é o disco dado ao lado.



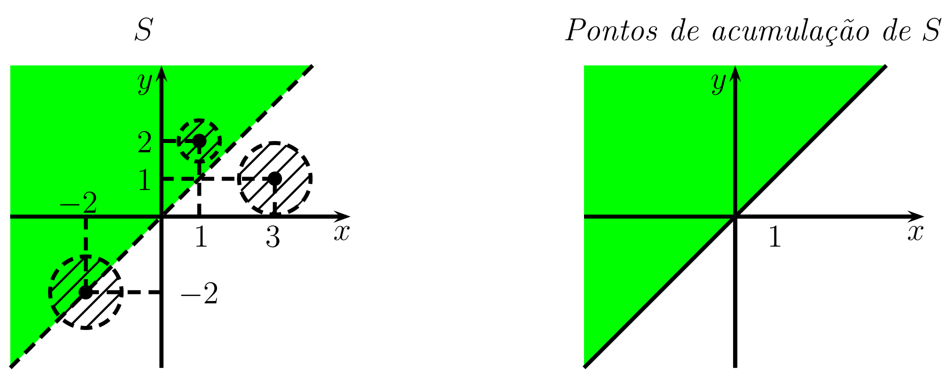
Definição **4.4.2.** *Sejam* S *um subconjunto do* R^2 *e* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Dizemos que* (x_0, y_0) *é um* ***ponto de acumulação*** *de* S, *se toda vizinhança* V *de* (x_0, y_0) *é tal que*

$$V \cap S - \{(x_0, y_0)\} \neq \emptyset.$$

Exemplo **4.4.2.** **a)** *Se* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x\}$, *então*

- $(-2, -2)$ *é um ponto de acumulação de* S.
- $(1, 2)$ *é ponto de acumulação de* S.
- $(3, 1)$ *não é ponto de acumulação de* S.

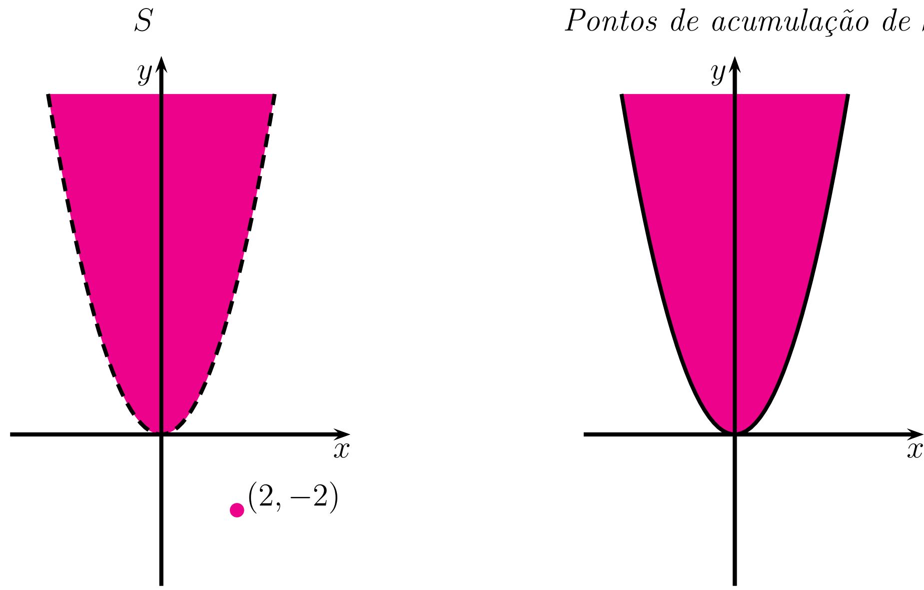
O conjunto dos pontos de acumulação de S *é* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x\}$.



b) *Se* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\} \bigcup \{(2,-2)\}$ *então*

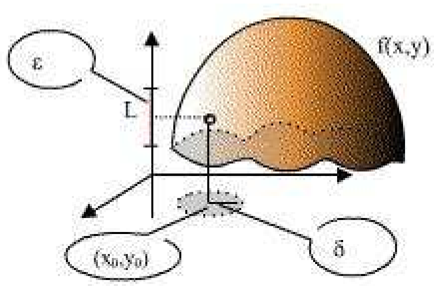
- $(2,-2) \in S$ *mas não é ponto de acumulação de* S.

O conjunto dos pontos de acumulação de S *é* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$.



Definição **4.4.3.** *Sejam* $L \in \mathbb{R}$, *uma função* $f(x,y)$ *cujo domínio indicaremos por* D *e* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *um ponto de acumulação de* D. *Dizemos que* L ***é o limite de*** $f(x,y)$ ***em*** (x_0, y_0) *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$(x,y) \in D \text{ e } 0 < d\left[(x,y),(x_0,y_0)\right] < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$



Exemplo **4.4.3.** *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x + 2y) = 5$.

Solução

De fato:

$$\begin{aligned}
|(x+2y)-5| &= |(x-1)+2(y-2)| \leq \\
&\leq |x-1|+2|y-2| \leq \\
&\leq \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \leq \\
&\leq 3d\Big[(x,y),(1,2)\Big]
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$; $d\Big[(x,y),(1,2)\Big] < \delta$ implica que $|(x+2y)-5| < 3\delta = \epsilon$. Logo

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+2y) = 5.$$

■

Observação 4.4.4. *Do Exemplo 4.5.3, podemos concluir que se $f(x,y)$ é um polinômio de duas variáveis então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Proposição 4.4.5. *(Conservação do sinal) Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L > 0$, então existe uma vizinhança V de (x_0,y_0) tal que para todo $(x,y) \in V - \{(x_0,y_0)\}$, $f(x,y) > 0$.*

Vale o análogo, para $L < 0$.

Propriedades Operatórias dos limites

Sejam as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ com domínio D e seja $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de D. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, e k constante, temos

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k\cdot f(x,y) = k\cdot L$

b) Se m e n são inteiros, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$,
desde que $L^{m/n}$ seja um número real.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Big(f(x,y) \pm g(x,y)\Big) = L_1 \pm L_2$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Big(f(x,y)\cdot g(x,y)\Big) = L_1 \cdot L_2$

d) Se $L_2 \neq 0$ então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$

Exemplo 4.4.4. *a)* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3x^3-y^2}{x-2} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3)\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x\right)^3 - \left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} y\right)^2}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x - \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 2} =$

$= \dfrac{3\cdot 1^3 - 2^2}{1-2} = 1$

b) Como conseqüência das propriedades operatórias, dada qualquer função racional $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ *e qualquer* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *pertencente a seu domínio (isto é,* $Q(x,y)\neq 0$*) temos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(x_0,y_0)}{Q(x_0,y_0)}$$

(Análogo ao que foi visto no Cálculo A, isto quer dizer que a função é contínua em (x_0,y_0)*.)*

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{2x^2y-y^2}{xy^2-4} = \dfrac{2\cdot 2^2\cdot(-1)-(-1)^2}{2\cdot(-1)^2-4} = \dfrac{9}{2}.$

d) Em alguns casos, mesmo quando o ponto não pertence a seu domínio, podemos calcular limites de funções racionais cancelando fatores do numerador e denominador

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2(y^2-1)}{xy^2(y+1)} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2(y-1)(y+1)}{xy^2(y+1)} = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2(y-1)}{xy^2} = -6$$

■

Definição 4.4.6. *Uma função* $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *é dito* ***limitada*** *se existe um número real* $M>0$ *tal que* $|f(x,y)|<M$ *para todo* $(x,y)\in D$.

Proposição 4.4.7. *Se* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$ *e* $|g(x,y)|\leq M$ *para todo* $(x,y)\in V$, V *uma vizinhança de* (x_0,y_0)*, então* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y)=0$.

Exemplo 4.4.5. *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen}\left(\dfrac{1}{y}\right)=0.$

Solução Como $\left|\text{sen }(\dfrac{1}{y})\right|\leq 1 = M$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, conclui-se pelo proposição 4.5.7 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen}\left(\dfrac{1}{y}\right)=0.$ ■

Proposição 4.4.8. *(Teorema do Confronto) Sejam f, g e h funções de $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e seja (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D. Se $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ em um disco com centro em (x_0, y_0) e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.*

Exemplo 4.4.6. *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$

Solução

$$0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^2 + y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y|,$$

sendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, conclui-se pelo teorema do confronto, que também que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}\right| = 0$ e, conseqüentemente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$ ■

Teorema 4.4.9. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se o limite de f quando (x, y) aproxima-se de (x_0, y_0) existe, então ele é **único**.*

Observação 4.4.10. *Do teorema, podemos concluir que se duas curvas passam pelo ponto (x_0, y_0) e originam valores diferentes para o limite de uma função, então o limite da função quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) **não existe**. Quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) ao longo de uma determinada direção C, ao $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in C}} f(x, y)$ dá-se o nome **limite direcional**.*

Exemplo 4.4.7. *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Solução

- Seja a curva C_1 de equação $y = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

- Seja a curva C_2 de equação $x = 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} f(x, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **não existe.** ■

Exemplo **4.4.8.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}$

Solução

- Seja a curva C_1 de equação $y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot 0}{(x-1)^2+0^2} = \lim_{x\to1} \frac{0}{(x-1)^2} = 0$$

- Seja a curva C_2 de equação $x=1$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = \lim_{y\to0} \frac{(1-1)\cdot y}{(1-1)^2+y^2} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y^2} = 0$$

- Seja a curva C_3 de equação $y=x-1$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in C_3}} f(x,y) = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **não existe.** ■

Exemplo **4.4.9.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Solução

- Seja a curva C_1 de equação $y=mx$ (m constante)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{x\to0} \frac{x^2\cdot mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

- Seja a curva C_2 de equação $y=x^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} f(x,y) = \lim_{x\to0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ **não existe.** ■

Observação **4.4.11.** *O cálculo de limites direcionais para o ponto* $(x_0, y_0) \neq (0,0)$*, pode ser facilitado ao se efetuar uma translação dos eixos* $\begin{cases} x = X - x_0 \\ y = Y - y_0 \end{cases}$ *que coloque a nova origem em* (x_0, y_0)*, ficando assim o estudo de um limite em* $(0,0)$.

Exemplo **4.4.10.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

Solução Fazemos a mudança $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$ então temos,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X-Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

- Seja a curva C_1 de equação $Y = mX$ (m constante)

$$\lim_{\substack{(X,Y)\to(0,0)\\(X,Y)\in C_1}} f(x,y) = \lim_{X\to 0} \frac{X-mX}{\sqrt{X^2+(mX)^2}} = \lim_{X\to 0} \frac{X(1-m)}{|X|\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}$$

- Como o limite direcional depende de m

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$ **não existe.** ■

Calculando Limites por Meio das Coordenadas Polares

Existem algumas "classes" de funções, para as quais o cálculo de limites pode ser feito por meio de mudança de variáveis por coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \text{ sen } \theta \end{cases}$.

Proposição **4.4.12.** *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{r\to 0^+} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r \text{ sen } \theta) = L, \text{ uniformemente em } \theta.$$

Ou seja, o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *existe se, e só se o limite radial de* f *escrito em coordenadas polares centrado em* (x_0, y_0) *não depende de* θ.

Exemplo **4.4.11.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Solução Usando coordenadas polares vamos verificar se existe

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r \text{ sen } \theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2 \text{ sen}^2\theta}{r\cos\theta - r \text{ sen } \theta} = \lim_{r\to 0} r\cdot\frac{1}{\cos\theta - \text{ sen } \theta}$$

Como a função $\dfrac{1}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$, não é limitada (se $\theta = \pi/4$, o denominador é nulo) a convergência não é uniforme em θ e o limite não existe. ■

Exemplo 4.4.12. *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$

Solução Usando coordenadas polares vamos verificar se existe

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos(r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)}{2r} = \cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

Como o limite depende θ, a convergência não é uniforme em θ e o limite não existe. ■

Exemplo 4.4.13. *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Solução Usando coordenadas polares vamos verificar se existe

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{|r|} = \lim_{r\to 0} |r|\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

porque $\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ é uma função de θ limitada, portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

■

Exemplo 4.4.14. *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$.

Solução Usando coordenadas polares vamos verificar se existe

$$\lim_{r\to 0} F(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{1-\cos(r)} = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos(r^2)}{\operatorname{sen}(r)} = \lim_{r\to 0} \frac{2\cos(r^2) - 4r^2\operatorname{sen}(r^2)}{\cos(r)} = 2.$$

$$\text{Portanto} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$

■

Observação **4.4.13.** *Em cada um desses exemplos acima, a existência ou inexistência do limite quando* $r \to 0$ *é razoavelmente clara. Contudo a mudança para coordenadas polares nem sempre ajuda e pode até nos levar a conclusões falsas. Por exemplo, o limite pode existir ao longo de toda reta (ou raio)* $\theta =$*constante e mesmo assim não existir em um sentido mais amplo.*

Exemplo **4.4.15.** *Calcule* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

Solução

Observe que mostramos em exemplo 4.5.9 que o limite não existe.

Vamos usar coordenadas polares para analisar a existência do limite no ponto $(0,0)$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \lim_{r\to 0}\frac{(r^2\cos^2\theta)(r\,\text{sen}\,\theta)}{r^4\cos^4\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta}{r^2\cos^4\theta + \text{sen}^2\theta}$$

- Seja s_1 uma reta que passa pelo pólo, não coincidente com o eixo polar, de equação $\theta \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{\substack{r\to 0\\(r,\theta)\in s_1}}\frac{r\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta}{r^2\cos^4\theta + \text{sen}^2\theta} = \lim_{\substack{r\to 0\\(r,\theta)\in s_1}}\frac{0\cdot\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta}{0^2\cdot\cos^4\theta + \text{sen}^2\theta} = \lim_{\substack{r\to 0\\(r,\theta)\in s_1}}\frac{0}{\text{sen}^2\theta} = 0.$$

- Seja s_2 a reta que contém o eixo polar, de equação $\theta = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. Nesse caso,

$$\lim_{\substack{r\to 0\\(r,\theta)\in s_2}}\frac{r\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta}{r^2\cos^4\theta + \text{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0}\frac{r(\pm 1)^2\cdot 0}{r^2(\pm 1)^4 + 0} = \lim_{r\to 0}\frac{0}{r^2} = 0.$$

Observamos portanto que, para qualquer reta s que passa pelo pólo, esse limite calculado sobre s é igual a zero.

Continuidade

Definição 5: Sejam $f(x,y)$ uma função, $D \subset \mathbb{R}^2$ seu domínio e $(x_0,y_0)\in D$. Dizemos que $f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0) se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Exemplo 15:

1) Se $f(x,y)$ é uma função polinomial, então $f(x,y)$ é contínua em qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$.

2) A seguinte função não contínua na origem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2y^2 + x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De fato:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3x^2y^2 + x^3}{x^2 + y^2}$$

por meio das coordenadas polares. Temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{r\to 0} \frac{-3(r^2 \cos^2\theta)(r^2 \operatorname{sen}^2\theta) + r^3 \cos^3\theta}{r^2 \cos\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{-3r^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + r^3 \cos^3\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} (-3r^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + r \cos^3\theta) = 0 \end{aligned}$$

Como este valor é diferente de $f(0,0)$, f é descontínua em $(0,0)$.

3) A seguinte função é contínua no ponto $(3,1)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \dfrac{\sqrt[3]{(x-3)(y-1)^5}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (3,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (3,1) \end{cases}$$

De fato:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,1) \\ (x,y)\neq(3,1)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(3,1)} \left(2 + \frac{\sqrt[3]{(x-3)(y-1)^5}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}} \right)$$

por meio das coordenadas polares. Temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{r\to 0} \left(2 + \frac{\sqrt[3]{(r\cos\theta)(r \operatorname{sen}\theta)^5}}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2}} \right) \\ &= \lim_{r\to 0} \left(2 + \frac{\sqrt[3]{r^6 \cos\theta \operatorname{sen}^5\theta}}{r} \right) \\ &= \lim_{r\to 0} \left(2 + r\sqrt[3]{\cos\theta \operatorname{sen}^5\theta} \right) = 2 \end{aligned}$$

Como este valor é igual a $f(0,0)$, f é contínua em $(0,0)$.

Observação:

As propriedades das funções contínuas são análogas às das funções contínuas de uma variável.

Proposição 4: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto (x_0, y_0). Então:

i) $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em (x_0, y_0).

ii) Se $f(x_0, y_0) \neq 0$ então $\dfrac{1}{f}$ é contínua em (x_0, y_0).

Exemplo 15:

1) As funções racionais nos pontos onde os polinômios do denominador não se anulam, são contínuas.

2) A função $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y}{x^2 + 1}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 5: Se $f(x, y)$ é continua em $(x_0, y_0), L_1 = f(x_0, y_0),$ e $g(z)$ é uma função de uma variável real tal que existe $\lim\limits_{z \to L_1} g(z) = L_2$ então $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} g(f(x, y)) = L_2$.

Exemplo 16:

1)

2)